Mikael Persson är en redaktionsslav som har suttit i förbundsstyrelsen och härstammar ursprungligen från UF Härnösand. Numera pluggar han data i Luleå.

Gyllene snittet

Vad är egentligen gyllene snittet? Är det ett geometriskt förhållande som naturen har skapat, eller är det bara något som människan har hittat på?

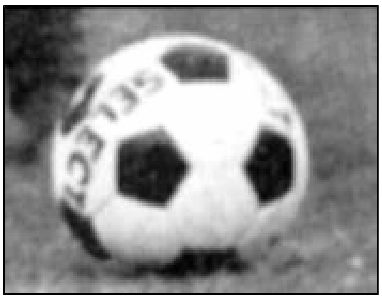


Bild 1. En typisk fotboll. Observera att konstruktionen är densamma som Leonardos modell i bild 3.

Det gyllene snittet är ett geometriskt förhållande som finns överallt omkring oss. Medvetet eller omedvetet används det av t.ex. arkitekter och konstnärer, men även i naturen finns skapelser med dessa proportioner. Det speciella med gyllene snittet är att det påstås vara estetiskt tilltalande för det mänskliga ögat. I rutan längst ner på sidan finns några matematiska definitioner av gyllene snittet.

Lite historik

Redan då Cheopspyramiden byggdes, ca. 2800 f.kr., påstår man att gyllene snittets proportioner har används. Pyramiden har idag eroderat och delvis förstörts, men om man uppskattar dess ursprungliga storlek och beräknar cosinus av vinkeln *a*, enligt bild 2, får man en överensstämmelse med gyllene snittet på tre decimaler. Vinkeln *a* uppskattades till 51.83°, vilket gav resultatet cos(51.83)= 0.618. Detta kan mycket väl vara ett lyckligt sammanträffande.
Även i dagen fotbollar kan man hitta gyllene snittet. En vanlig fotboll består ofta av tolv svarta femhörningar och tjugo vita sexhörningar. Det var ursprungligen Arkimedes som skapade den geometriska beskrivningen. På bild 3 kan vi se en teckning av Leonardo da Vinci som publicerades i verket De Divina Proportione, vilket betyder Om den gudomliga proportionen som är ett annat namn för gyllene snittet, i slutet av 1500-talet.

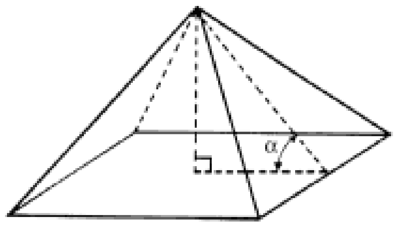


Bild 2. I Cheopspyramiden kan man också hitta gyllene snittet om man studerar vinkeln a mellan basytan och en sida.

Bild 3. Modell ritad av Leonardo da Vinci.

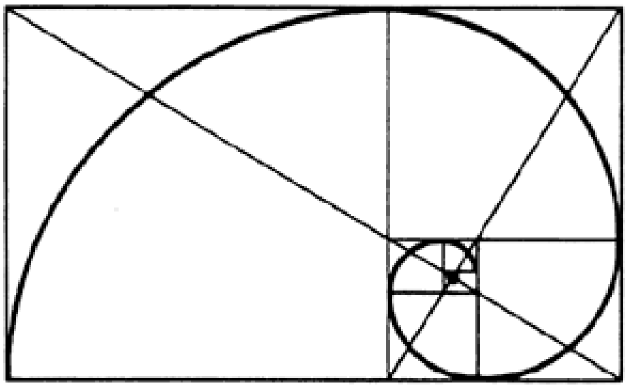


Bild 4. Logaritmisk spiral.

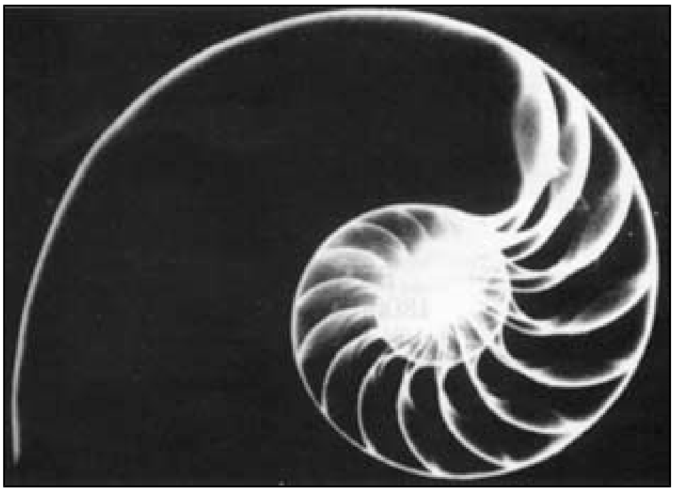


Bild 5. Fossil av en pärlbåtsnäcka. Man kan se att dess tillväxt sker likformigt med den logaritmiska spiralen. På liknande sätt kan man hitta det gyllene snittet på många ställen i naturen.

Arkitektur
Förutom Cheopspyramiden finns det många andra kända byggnadsverk som man kan spåra gyllene snittets proportioner. Bland annat kan man nämna templet Parthenon i Athen där fasaden beskriver en gyllene rektangel. Här i Sverige kan man nämna långhuset i Uppsala domkyrka, vilket Folke Nordström har påvisat i sin doktorsavhandling.

Natur
I naturen finns det många Fibonaccital. En tallkottes fjäll har t.ex. ett mönster med 8 spiraler motsols och 5 medsols. Ananasen har på motsvarande sätt 13 respektive 8 spiraler. Dessa spiraler kan även återfinnas i t.ex. solrosen och tusenskönan. Fibonacciserier kan även återfinnas som logaritmiska spiraler i snäckor. Ett bra exempel är pärlbåtsnäckan, vilket kan ses i bild 5.

Matematik

Den person som först tros ha gjort en matematisk beskrivning av gyllene snittet var pythagoréen (dvs anhängare av den sammanslutning som bildades av Pythagoras) Hippasos, ca. 450 år f.kr. Han studerade femhörningar, se figur. Förhållandet mellan en sida och en diagonal på femhörningen ger värdet av gyllene snittet. Sambandet han kom fram till var:

$$\phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$$

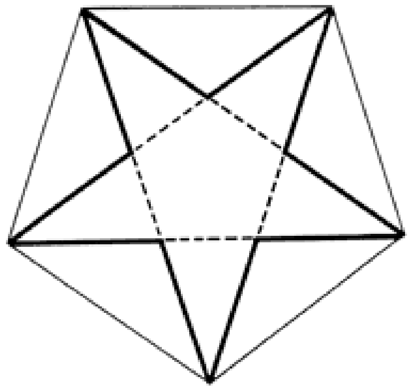


Bild 6. I en femhörning kan man erhålla det gyllene snittet om man tar kvoten mellan en sida och en diagonal. Femhörningar ansågs förr i tiden att äga speciella egenskaper och användes t.ex. av Platon för att beskriva världsalltet. Pentagram användes dessutom flitigt som en magisk symbol av alkemister och "visa" män.

Handelsmannen och matematikern Leonardo av Pisa, mer känd som Fibonacci, var verksam i början på 1200-talet. Han arbetade bland annat med ett biologiskt problem som beskrev kaniners fortplantning. Om man utgår från ett kaninpar, hur kommer de att föröka sig i tiden. Fibonacci utvecklade följande talserie: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 43, 55, 89, 144, 233, osv där det efterföljande talet är summan av de två föregående. Detta kan beskrivas med följande ekvation: u(1)= u(2)=1 för de två första talen och u(n)=u(n-1) + u(n-2) för n> =3. Om man skriver serien med kvoten av en term och närmast föregående får man följande serie:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \frac{13}{21}, \frac{21}{34}, \frac{34}{55}, \ldots$$

Om man fortsätter på denna serie kommer kvoten att närma sig det gyllene snittet. Om man vill uttrycka detta matematiskt kan kan skriva:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618034$$

Funktionen limes (lim) ovan defineras som värdet av uttrycket, i detta fall kvoten mellan u(n) och u(n+1) då variabeln n går mot oändligheten.

Om man vill fördjupa sig mer i ämnet kan man läsa en artikel i Forskning och framsteg, 5/84, Gyllene snittet överallt av Tord Hall.

Definition av gyllene snittet

I figuren nedan visas ett vanligt sätt att illustrera det gyllene snittets proportioner. Enligt definition är snittet en relation mellan en mindre och en större del av en helhet, där den mindre delen står i samma proportion till den större som den större till helheten och tvärt om.

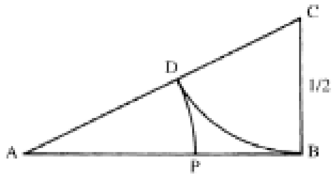
Detta kanske låter lite invecklat, men blir enklare om man utgår från figurens beteckningar. Sträckan AC=x, BC=y och AB= x+y. Detta ger följande samband:

$$\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{x}{x+y}$$

En omskrivning ger $y(x+y)=x^2$, och genom att sätta $y= l-x$ blir ekvationen $x^2+x-1=0$, vilken har den positiva roten:

$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \phi \approx 0.618034$$

Man kan också konstruera gyllene snittet grafiskt med hjälp av en passare och penna. Utgå från en rätvinklig triangel med ena kateten BC=l/2 och den andra kateten AB är en längdenhet. Rita sedan med C som medelpunkt och BC som radie en cirkelbåge som skär AC i punkten D. Rita sedan med A som medelpunkt och AD som radie en cirkelbåge som skär AB i punkten P. Då har man skapat sträckan AP som delar AB enligt gyllene snittet.



Ur femhörningen i figuren i artikeln ovan kan man utan alltför ingående kunskaper i matematik härleda ytterligare ett intressant trigonometriskt samband för gyllene snittet:

$$\phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 2 \cdot \sin 18^\circ$$

Förbundet Unga Forskares tidskrift Scientium nummer 5-6 1994.
Senast uppdaterad 1997-02-08 av micke@ludd.luth.se